



RR-0877

Third Year B. Sc. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - VI

(Real Analysis) (Old Course)

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 100

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :
T. Y. B. Sc.

Name of the Subject :
Mathematics - 6 (Old)

Subject Code No. : 0 8 7 7 Section No. (1, 2,.....): Nil

Seat No. :

Student's Signature

- (૨) બધા જ પ્રશ્નોના જવાબ આપો.
(૩) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.
(૪) સામાન્ય સંકેતોને અનુસરો.

૧ (અ) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(૧) સાબિત કરો કે શ્રેઢી $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$ અપસારી છે. ૨

(૨) $[0, 1]$ માં સંમેય સંખ્યાઓનું લાક્ષણિક વિધેય X છે. બતાવો ૨

$$\int_0^{-1} X = 1.$$

(૩) વ્યાખ્યા આપો : સામ્યમાનો. ૧

(૪) R_d ને R_d સિવાય ગીચ ઉપગણ નથી એમ સાબિત કરો. ૨

(બ) નીચેના વિધાનોની સત્યાર્થતા નક્કી કરો. તમારા જવાબનું સમર્થન કરો. ૮

(૧) માનાવકાશમાં પ્રત્યેક કોશી-શ્રેણી અભિસારી છે.

(૨) R_d ના કોઈ પણ ઉપગણનો વ્યાસ એક છે.

(૩) R' સુગ્રથિત છે.

(૪) $[0, 1]$ એ R' માં સંપૂર્ણ છે.

૨ (અ) જો $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ વધતી ન હોય એવી ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી ૭

હોય અને $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ અભિસારી હોય તો સાબિત કરો કે $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

(બ) વધતી ન હોય એવી ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ છે. ૫

જો $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2n}$ અભિસારી હોય તો સાબિત કરો કે $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

અભિસારી છે.

(ક) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : ૬

(૧) સાબિત કરો કે શ્રેઢી $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ અભિસારી છે.

(૨) સાબિત કરો કે શ્રેઢી $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 - 4n + 7}$ અપસારી છે.

અથવા

૨ (અ) જો ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓની અપસારી શ્રેઢી $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ હોય તો સાબિત ૭

કરો કે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ એવી મળે કે જે શૂન્યને

અભિસરે છે જ્યારે $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ અપસારી છે.

(બ) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ એ વધતી ન હોય એવી ધન સંખ્યાઓની શ્રેણી છે. જો ૫

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2n}$ અપસારી હોય તો સાબિત કરો કે $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ અપસારી છે.

(ક) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : ૬

(૧) સાબિત કરો કે શ્રેઢી $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ શરતી અભિસારી છે.

(૨) સાબિત કરો કે શ્રેઢી $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^x}$ અપસારી છે.

૩ (અ) જો $f, g \in R[a, b]$ તો સાબિત કરો કે $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. ૭

(બ) જો વાસ્તવિક વિધેય f એ $[a, b]$ માં સીમિત હોય તો સાબિત કરો કે ૬
 $u[f : \sigma] \geq u[f : \sigma^*]$, જ્યાં $\sigma \subset \sigma^*$.

(ક) સાબિત કરો કે \mathbf{R}^n ના પ્રત્યેક ત્રણ ઉપગણનું માપ શૂન્ય છે. ૫

અથવા

૩ (અ) f એ $[a, b]$ પર સીમિત વિધેય છે. સાબિત કરો કે જો $f \in R[a, b]$ ૭

હોય તો $[a, b]$ નું ઉપવિભાજન σ મળે કે જેથી પ્રત્યેક $\epsilon > 0$ માટે

$$u[f; \sigma] - L[f; \sigma] < \epsilon \text{ થાય.}$$

(બ) જો f એ $[a, b]$ માં સતત હોય, $f(x) \geq 0$, $(a \leq x \leq b)$ અને ૬

$\int_a^b f(x) dx = 0$ હોય તો સાબિત કરો કે f એ $[a, b]$ માં સર્વસમ શૂન્ય છે.

(ક) જો f એ $[a, b]$ પર સતત હોય તો સાબિત કરો કે ૫

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

૪ (અ) $\langle M, \rho \rangle$ એ માનાવકાશ છે અને $a \in M$, f અને g એ બે ૭

M માં વાસ્તવિક વિધેયો છે. જો $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ અને

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ હોય તો સાબિત કરો કે $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$.

(બ) માનાવકાશમાં કોશી શ્રેણીની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે દરેક ૬
અભિસારી શ્રેણી એ માનાવકાશમાં કોશી શ્રેણી છે પરંતુ તેથી ઉલ્ટું સાચું નથી.

(ક) ધારો કે $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ જો $x, y \in \mathbf{R}^2$ અને ૫

$\rho(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ હોય તો સાબિત કરો કે ρ એ માન છે.

અથવા

૪ (અ) $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ અને $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ માનાવકાશો છે. સાબિત કરો કે જો ૭

$f: M_1 \rightarrow M_2$ એ $a \in M_1$ આગળ સતત હોય તો અને તો જ જ્યારે

M_1 માં બિંદુઓની શ્રેણી $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, a ને અભિસરતી હોય ત્યારે

M_2 માં બિંદુઓની શ્રેણી $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ એ $f(a)$ ને અભિસરે છે.

(બ) R_d માં દરેક કોશી શ્રેણી અભિસારી છે એમ સાબિત કરો. ૬

(ક) જો $d: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ વિધેય ૫

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ વડે વ્યાખ્યાયિત

છે. સાબિત કરો કે $\langle \mathbf{R}^2, d \rangle$ માનાવકાશ છે.

- ૫ (અ) $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ અને $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ માનાવકાશો છે. સાબિત કરો કે જો $f: M_1 \rightarrow M_2$ વિધેય M_1 માં સતત હોય તો અને તો જ જ્યારે G એ M_2 માં વિવૃત્ત હોય ત્યારે $f^{-1}(G)$ એ M_1 માં વિવૃત્ત હોય છે. ૭
- (બ) E એ માનાવકાશ M નો કોઈ ઉપગણ છે. સાબિત કરો કે \bar{E} સંવૃત્ત છે. ૬
- (ક) f અને g એ માનાવકાશ M પરના વાસ્તવિક વિધેયો છે. જો $A = \{x \in M \mid f(x) < g(x)\}$ હોય તો સાબિત કરો કે A વિવૃત્ત છે. ૫

અથવા

- ૫ (અ) $\langle M, \rho \rangle$ એ માનાવકાશ છે અને A એ M નો ઉચિત ઉપગણ છે. સાબિત કરો કે જો A નો ઉપગણ G_A એ $\langle A, \rho \rangle$ નો વિવૃત્ત ઉપગણ હોય તો અને તો જ $\langle M, \rho \rangle$ નો વિવૃત્ત ઉપગણ G_M મળે કે જેથી $G_A = A \cap G_M$. ૭
- (બ) જો A એ માનાવકાશ $\langle M, \rho \rangle$ નો પૂર્ણતયા સીમિત ઉપગણ હોય તો સાબિત કરો કે A સીમિત છે. ૬
- (ક) f એ માનાવકાશ M પર સતત વાસ્તવિક વિધેય છે. જો A એ $x \in M$ નો એવો ગણ છે કે જેથી $f(x) \geq 0$ સાબિત કરો કે A સંવૃત્ત છે. ૫

- ૬ (અ) સાબિત કરો કે જો માનાવકાશ M ને હાઈને-બોરેલ ગુણધર્મ હોય તો તે સુગ્રથિત છે. ૭
- (બ) $\langle M, \rho \rangle$ માનાવકાશ છે. જો $\langle M, \rho \rangle$ સુગ્રથિત હોય તો સાબિત કરો કે M માં આવેલ પ્રત્યેક શ્રેણીને M ના બિંદુ આગળ અભિસરતી ઉપશ્રેણી છે. ૬
- (ક) સાબિત કરો કે સંપૂર્ણ માનાવકાશનો સંવૃત્ત ઉપગણ સંપૂર્ણ છે. ૫

અથવા

- ૬ (અ) જો $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ હોય તો સાબિત કરો કે માનાવકાશ M સુગ્રથિત છે, જ્યાં \mathcal{F} એ શાન્ત ગુણધર્મ ધરાવતો M ના સંવૃત્ત ઉપગણોનો સમૂહ છે. ૭
- (બ) જો f એ $[a, b]$ પરનું સતત વાસ્તવિક વિધેય હોય તો સાબિત કરો કે f નો આલેખ એ R^2 નો સુગ્રથિત ઉપગણ છે. ૬
- (ક) સાબિત કરો કે R^2 એ સંપૂર્ણ માનાવકાશ છે. ૫

ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the Instruction No. 1 of Page no. 1.
(2) Answer all questions.
(3) Figures to the right indicate marks of the question.
(4) Follow usual notations.

- 1 (a) Answer the following questions.
- (1) Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$ is divergent. 2
- (2) X is the characteristic function on $[0, 1]$. Show 2
that $\int_0^{-1} X = 1$.
- (3) Define : Equivalent metrics. 1
- (4) Show that R_d has no dense subset except R_d itself. 2
- (b) Decide the validity of the following statements. 8
Justify your answer:
- (1) In a metric space every Cauchy-Sequence is convergent
- (2) The diameter of any subset of R_d is one.
- (3) R' is compact.
- (4) In R' , $[0, 1]$ is complete.
- 2 (a) If $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a non-increasing sequence of positive 7
real numbers and if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges then prove
that $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.
- (b) If $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a non-increasing sequence of positive 5
real numbers and if $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2n}$ converges then prove
that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.
- (c) Answer the following : 6
- (1) Prove that the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ is convergent

(2) Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 - 4n + 7}$ is divergent.

OR

2 (a) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a divergent series of positive real 7

numbers then prove that there is a sequence of positive real numbers $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ which converges to zero but for

which $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ diverges.

(b) Let $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a non-increasing sequence of positive 5

numbers. If $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2n}$ is divergent then prove that

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent.

(c) Answer the following : 6

(1) Prove that the series $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ is conditionally convergent.

(2) Prove that the series $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^x}$ is divergent.

3 (a) If $f, g \in R[a, b]$ then prove that $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. 7

(b) For a bounded real-valued function f on $[a, b]$ prove 6 that $u[f; \sigma] \geq u[f; \sigma^*]$, where $\sigma \subset \sigma^*$.

(c) Prove that every countable subset of R' has measure 5 zero..

OR

3 (a) Let f be a bounded function on $[a, b]$. Prove that, if 7 $f \in R[a, b]$ then for every $\epsilon > 0$ there exists a subdivision σ of $[a, b]$ such that $u[f; \sigma] - L[f; \sigma] < \epsilon$.

- (b) If f is continuous on $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, ($a \leq x \leq b$) and **6**

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \text{ then prove that } f \text{ is identically zero on}$$

$[a, b]$.

- (c) If f is continuous on $[a, b]$ then prove that **5**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_a^b f.$$

- 4 (a) Let $\langle M, \rho \rangle$ be a metric space and $a \in M$. Let f **7**

and g be two real-valued functions on M . If

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ and } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \text{ then prove that}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = LM.$$

- (b) Define a Cauchy sequence in a metric space. Prove **6**

that every convergent sequence in a metric space is a Cauchy-sequence but converse is not true.

- (c) Let $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. If $x, y \in R^2$ and **5**

$$\rho(x, y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ then prove that}$$

ρ is a metric.

OR

- 4 (a) Let $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ and $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ be two metric spaces. **7**

Then prove that $f: M_1 \rightarrow M_2$ is continuous at $a \in M_1$

if and only if whenever $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of

points in M_1 converges to a then the sequence

$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ of points in M_2 converges to $f(a)$.

- (b) Show that every Cauchy sequence in R_d is **6**

convergent.

- (c) Let $d: R^2 \times R^2 \rightarrow [0, \infty)$ a function defined as **5**

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \text{ then prove}$$

that $\langle R^2, d \rangle$ is a metric space.

- 5 (a) Let $\langle M_1, \rho_1 \rangle$ and $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ be metric spaces and let $f: M_1 \rightarrow M_2$ be a function. Then prove that f is continuous on M_1 if and only if $f^{-1}(G)$ is open in M_1 whenever G is open in M_2 . 7
- (b) Let E be any subset of a metric space M . Then prove that \bar{E} is closed. 6
- (c) Let f and g be continuous real-valued functions on the metric space M . If $A = \{x \in M / f(x) < g(x)\}$ then prove that A is open. 5

OR

- 5 (a) Let $\langle M, \rho \rangle$ be a metric space and let A be a proper subset of M . Then prove that the subset G_A of A is open subset of $\langle A, \rho \rangle$ if and only if there exists an open subset G_M of $\langle M, \rho \rangle$ such that $G_A = A \cap G_M$. 7
- (b) If the subset A of the metric space $\langle M, \rho \rangle$ is totally bounded then prove that A is bounded. 6
- (c) Let f be a continuous real-valued function on the metric space M . Let A be the set of all $x \in M$ such that $f(x) \geq 0$. Prove that A is closed. 5
- 6 (a) If a metric space M has the Heine-Borel property then prove that M is compact. 7
- (b) Let $\langle M, \rho \rangle$ be a metric space. If $\langle M, \rho \rangle$ is compact then prove that every sequence of points in M has a subsequence converging to a point in M . 6
- (c) Prove that a closed subset of a complete metric space is complete. 5

OR

- 6 (a) If $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \phi$ then prove that metric space M is compact. Where \mathfrak{F} is a family of closed subsets of M with the finite intersection property. 7
- (b) If f is a continuous real-valued function on $[a, b]$ then prove that the graph of f is a compact subset of R^2 . 6
- (c) Prove that R^2 is a complete metric space. 5